

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE  
FACOLTÀ DI SCIENZE M.F.N.

Tesi di Laurea Triennale in Matematica

di

Lorenzo Torricelli

**Molteplicità di Intersezione su  
Superfici Proiettive Nonsingolari e  
Risoluzione di Applicazioni Razionali  
in Scoppiamenti**

Relatore

Prof.ssa Lucia Caporaso

ANNO ACCADEMICO 2004 - 2005

Ottobre 2005

## Sommario

Questa tesina consiste di due parti. Nella prima, che vuole essere in sostanza propedeutica alla seconda, si espongono e dimostrano le proprietà della molteplicità di intersezione di divisori lungo superfici proiettive lisce. Nella seconda si introduce il concetto di scoppimento di una superficie rispetto ad una applicazione birazionale e, attraverso alcuni risultati preliminari sulle molteplicità di intersezione nel caso specifico, si procede alla dimostrazione di importanti teoremi di struttura delle applicazioni birazionali tra superfici: il Teorema di eliminazione di indeterminazione e il Teorema di fattorizzazione in scoppiamenti. Si conclude con alcuni cenni sul problema della classificazione birazionale di superfici.

Per la prima parte si è seguito prevalentemente Shafarevich [6] e [7], integrato da Silverman [9], Fulton [10], e Reid [5]. Per la seconda si è preferito Beauville [1] con un occhio a Shafarevich [7]. Sono stati consultati inoltre Fulton [2](appendice) e Sharp [8] per alcuni aspetti di algebra commutativa.

# Capitolo 1

## Molteplicità di intersezione su superfici proiettive nonsingolari

Lo studio dell'intersezione di curve, o più in generale di divisori, su una superficie ricorda in un certo senso il problema di individuare il numero delle radici di un polinomio di grado  $n$  in un campo algebricamente chiuso. Queste risultano essere esattamente  $n$  solo se contate con la loro molteplicità, intero che viene definito di conseguenza. In geometria ci si può domandare in modo simile di determinare e quantificare il numero di intersezioni di  $n$  sottovarietà in una varietà ambiente di dimensione  $n$ . La risposta classica è che queste sono pari al prodotto dei gradi delle due varietà, a patto di contarle con un certo intero assegnato, la molteplicità. Questo intero può essere dedotto nei casi più semplici direttamente dal Teorema di Bézout, ad esempio limitandoci a studiare sottovarietà in  $\mathbb{P}^n$ ; ciò nonostante è naturale voler generalizzare tale nozione a casi più generali e a varietà arbitrarie. L'oggetto che soddisfa questa nostra richiesta è una particolare forma bilineare definita su tutto il gruppo dei divisori di una varietà; come vedremo nel secondo capitolo la portata di questo strumento va ben al di là della semplice quantificazione e classificazione delle intersezioni, in virtù delle importanti proprietà di invarianza geometrica di cui gode.

Una teoria dell'intersezione può essere sviluppata nei contesti più generali; qui ci si limita alla generalizzazione più semplice, quella dello studio dell'intersezione su varietà proiettive nonsingolari. Concentreremo la nostra attenzione sulle superfici, qui intese sempre come varietà proiettive di dimensione 2. Questo verrà fatto innanzitutto perchè sotto le suddette ipotesi non vi è alcuna perdita di generalità nel supporre  $n = 2$ ; in secondo luogo i risultati raggiunti vogliono essere intesi come appoggio strutturale concreto per la seconda parte, trattando questa esclusivamente di superfici.

## 1.1 Molteplicità di intersezione locale e definizione

Partiamo con la definizione e le proprietà del mattone fondamentale della nostra costruzione, la *molteplicità di intersezione locale*.

Sia  $X \subset \mathbb{P}^n$  nonsingolare. Diremo che  $D_1, D_2 \in \text{Div}X$  sono *privi di componenti comuni* se l'intersezione dei supporti di  $D_1$  e  $D_2$  non contiene alcuna componente irriducibile dei due supporti. Ricordiamo che dalla nonsingolarità di  $X$  deriva che ogni divisore effettivo  $D \in \text{Div}X$  è localmente principale; cioè  $\forall x \in X$  esiste un aperto  $U$  di  $D$  contenente  $x$  tale che l'ideale di  $U \cap D$  nell'algebra delle funzioni regolari di  $U$  è principale o, equivalentemente, se  $\forall x \in X$  l'ideale di  $D$  nell'anello locale  $\mathcal{O}_{x,X}$  è principale. Diremo i generatori di tali ideali (indifferentemente in ambedue i casi) *equazioni locali* di  $D$  in  $X$ . D'ora in poi scriveremo  $\mathcal{O}_x$  per l'anello locale di  $X$  in  $x$ . Indicheremo con  $M$  l'ideale massimale di un anello locale, e con  $M_x$  l'ideale massimale di  $x$  nell'algebra delle funzioni regolari.

**Lemma 1.1.1.** *Sia  $X$  superficie nonsingolare e  $D_1, D_2$  divisori effettivi di  $X$  privi di componenti comuni di equazioni locali e sia  $x \in \text{Supp}D_1 \cap \text{Supp}D_2$ .*

Allora date  $f_1$  e  $f_2$  equazioni locali di  $D_1$  e  $D_2$  il quoziente  $\frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)}$  è un  $k$ -spazio vettoriale di dimensone finita e questa non dipende dalla scelta di  $f_1$  e  $f_2$ .

*Dimostrazione.* La seconda affermazione è ovvia per la definizione di equazione locale. Sia  $M$  ideale massimale di  $\mathcal{O}_x$ . Prendiamo  $y \in M$  arbitrario tale che  $\mathcal{V}(y) \subset \mathcal{V}(f_1, f_2)$ . Consideriamo la variabile ausiliaria  $T$ ; l'elemento  $Ty - 1 \in \mathcal{O}_x[T]$  è per costruzione tale che  $\mathcal{V}(f_1, f_2, Ty - 1) = \emptyset$  e quindi per il Nullstellensatz  $(f_1, f_2, Ty - 1) = (1)$  ovvero  $\exists p_1, p_2, p_3 \in \mathcal{O}_x[U]$  tali che

$$p_1 f_1 + p_2 f_2 + p_3 (Ty - 1) = 1.$$

In particolare tale relazione resta valida scegliendo  $T = \frac{1}{y}$ ; per tale scelta, e moltiplicando per il minimo comun denominatore  $y^m$ ,  $m > 0$ , si ha un espressione di  $y^m$  in termini di  $f_1$  e  $f_2$ . Dunque  $y^m \in (f_1, f_2)$ . Dalla Noetherianità di  $\mathcal{O}_x$  concludiamo che scegliendo come  $y$  tutti i generatori di  $M$  esisterà un  $n > 0$  tale che  $M^n \subset (f_1, f_2)$ .

Ora è sufficiente mostrare che  $\dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{M^n} < \infty$ . Essendo  $X$  nonsingolare esiste un'inclusione  $\mathcal{O}_x \hookrightarrow k[[X, Y]]$ , ovvero ogni funzione regolare in un intorno di  $x$  possiede un'unica espansione in serie formale. Basterà troncare opportunamente tale espressione per ottenere la tesi. Ancora per la nonsingularità possiamo scrivere un generico elemento di  $\mathcal{O}_x$  nella forma  $\frac{f}{g} \in \mathcal{O}_x$ ,  $f \in k[X]$ ,  $g \in k[X] \setminus M$ , e  $X$  si può supporre affine. Evidentemente se  $M = (x_1, x_2)$  allora  $(g, M) = (g, x_1, x_2) = (1)$  ovvero  $\exists b, a_1, a_2 \in k[X]$  tali che  $gb + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 1$ . Chiamiamo  $k[x_1, x_2]_{<n}$  lo spazio vettoriale dei polinomi di grado strettamente minore di  $n$ , e posto  $h = a_1 x_1 + a_2 x_2$  si ha

$$\frac{f}{g} = \frac{fb}{gb} = \frac{fb}{1-h} = fb(1+h+\dots+h^{n-1}) + \frac{fbh^n}{1-h} \in k[x_1, x_2]_{<n} + M^n.$$

L'inclusione opposta è ovvia. Pertanto  $\mathcal{O}_x \cong k[x_1, x_2]_{<n} + M^n$  e tale somma è diretta per quanto premesso sullo sviluppo in serie. Quindi per il primo Teorema di isomorfismo di anelli abbiamo che  $\frac{\mathcal{O}_x}{M^n} \cong k[x_1, x_2]_{<n}$ . Siccome quest'ultimo è di dimensione finita segue la tesi.

È dunque ben posta la seguente

**Definizione 1.1.2.** Siano  $D_1, D_2, x$  e  $X$  come sopra. Definiamo *molteplicità* o *indice di intersezione locale* in  $x$  di  $D_1$  e  $D_2$

$$(D_1, D_2)_x = \dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)}.$$

Siamo ora pronti per costruire la nostra forma bilineare su tutto  $\text{Div}X$

**Teorema 1.1.3.** *Sia  $X$  una superficie proiettiva nonsingolare. Allora esiste un'applicazione*

$$I : \text{Div}X \times \text{Div}X \longmapsto \mathbb{Z}$$

*tale che:*

(i)  $D_1, D_2 \in \text{Div}X$  sono divisori effettivi e privi di componenti comuni

$$\text{allora } I(D_1, D_2) = \sum_{x \in X} (D_1, D_2)_x ;$$

(ii)  $I$  è bilineare simmetrica;

(iii) Se  $D_1, D_2, D'_1 \in \text{Div}X$  e  $D_1 \sim D'_1$  allora  $I(D_1, D_2) = I(D'_1, D_2)$ .

Definiremo  $I$  in modo da verificare (i) e ci occuperemo di dimostrare che tale definizione è ben posta su tutto  $\text{Div}X$ , non solo su divisori effettivi e privi di componenti comuni. La dimostrazione di (ii) e (iii) verrà affrontata nelle sezioni successive. L'idea è di costruire un'applicazione che sia in qualche modo una generalizzazione della molteplicità di intersezione locale e che in prospettiva sia compatibile con la richiesta bilinearità.

Notiamo che se  $D_1$  e  $D_2$  sono divisori qualsiasi allora  $\exists P_1, Q_1 > 0$  (divisori degli zeri) e  $P_2, Q_2 > 0$  (divisori dei poli) tali che  $D_1 = P_1 - P_2$  e  $D_2 = Q_1 - Q_2$ . Scritti i divisori in tale forma poniamo

$$I(D_1, D_2) = \begin{cases} \sum_{x \in X} \sum_{i,j=1,2} (-1)^{i+j} (P_i, Q_j)_x & \text{se } D_1 \text{ e } D_2 \text{ non hanno componenti comuni} \\ I(D'_1, D_2), D'_1 \sim D_1, \text{ con } D'_1 \text{ e } D_2 \text{ senza componenti comuni, altrimenti} \end{cases}$$

Chiaramente se  $x \notin \text{Supp}D_i$  allora  $(f_i) = \mathcal{O}_x$ , e cioè  $(D_1, D_2)_x = 0$ ; pertanto la somma è finita ed in effetti ha luogo solo sui punti contenuti in entrambi i supporti.

Che questa definizione sia ben posta è tutto da dimostrare, ed è precisamente ciò che faremo ora. Avremo però bisogno di supporre di aver dimostrato (iii) per divisori privi di componenti comuni, cosa che verrà fatta in seguito. Una volta conclusa questa dimostrazione non sarà riduttivo, nelle prossime sezioni, dimostrare le proprietà di  $I$  limitandosi a considerare divisori privi di componenti comuni, proprio per come è stato definito l'indice di intersezione.

**Proposizione 1.1.4.** *Sia  $X$  superficie proiettiva liscia e  $D_1, D_2 \in \text{Div}X$ . Allora esiste  $D'_1$  tale che  $D_1 \sim D'_1$  e  $D'_1$  e  $D_2$  non hanno componenti comuni.*

Da questa proposizione discende immediatamente che la definizione dell'indice di intersezione è ben posto. Supponiamo infatti che (iii) valga nelle condizioni specificate sopra. Se  $D_1$  e  $D_2$  hanno componenti comuni basta prendere  $D'_1$  come dalla proposizione e calcolare  $I(D'_1, D_2)$ ; questo non dipenderà dalla scelta del divisore ausiliario  $D'_1$  proprio in virtù di (iii).

Per la dimostrazione avremo bisogno del seguente teorema:

**Teorema 1.1.5.** *Sia  $D \in \text{Div}X$ ,  $X$  varietà nonsingolare; comunque dati  $x_1, \dots, x_n \in X$  esiste  $D' \in \text{Div}X$ ,  $D' \sim D$  tale che  $x_i \notin \text{Supp}D'$ ,  $i = 1, \dots, n$ .*

*Dimostrazione.* Dati comunque  $n$  punti in una varietà  $X$  è sempre possibile individuare un suo aperto affine  $X'$  che li contenga tutti; possiamo quindi supporre  $X$  affine.

Procediamo per induzione su  $n$ . Se  $n = 1$  e  $x_1 \in D$  (altrimenti non c'è nulla da dimostrare) prendiamo un'equazione locale  $f$  di  $D$  in un intorno di  $x_1$ ; sarà  $\text{div}f = D + \sum_j k_j D_j$ , e quindi  $D' = \sum_j k_j D_j$  è il divisore richiesto poichè  $x_1 \notin D_j$  per ogni  $j$ .

Supponiamo la tesi vera per  $n - 1$  punti arbitrari e scegliamo  $x_1, \dots, x_n \in X$ . Dato  $\mathbf{D} \in \text{Div}X$  possiamo trovare per l'ipotesi induttiva un divisore  $D \sim \mathbf{D}$  in modo che  $x_1, \dots, x_{n-1} \notin \text{Supp}D$  ma a priori  $x_n \in \text{Supp}D$ . Per dimostrare il teorema dovremo costruire un divisore  $D' \sim D$  che non contenga  $x_i$  per  $i = 0, \dots, n$ . È altresì lecito supporre che  $D$  sia un divisore primo, salvo ripetere la dimostrazione per ciascuna componente ed usare la compatibilità di  $\sim$  con la somma. Identificheremo di fatto  $D$  con il suo supporto.

Innanzitutto prendiamo un'equazione locale  $f'$  di  $D$  in un certo intorno aperto di  $x_n \in D$ . Vogliamo dimostrare che possiamo sceglierne un'altra addirittura in  $k[X]$ . Siano  $C_1, \dots, C_m$  chiusi irriducibili di  $X$  in cui  $f'$  non è regolare,  $C_j = \mathcal{Z}(h_j)$ ,  $h_j \in k[X]$ . Essendo  $f'$  regolare in  $x_n$  avremo  $h_j(x_n) \neq 0$ . L'equazione locale richiesta è pertanto  $f := f' \prod_{j=0}^{m-1} h_j$ . Tale funzione è regolare su tutto  $X$  ed è ancora un'espressione di  $D$  localmente in  $x_n$  perchè globalmente non è stata aggiunta nessuna componente passante per  $x_n$ .

Si consideri ora, per  $i = 0, \dots, n - 1$ , il seguente chiuso di  $X$

$$D_{x_i} = D \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n\}.$$

Esisteranno, per ogni  $i$ , delle  $g_i \in k[X]$  tali che  $g_i(x) = 0 \forall x \in D_{x_i}$  e  $g_i(x_i) \neq 0$ . Poichè le  $g_i$  sono regolari su  $X$  è possibile costruire la seguente funzione in  $k[X]$

$$F = f + \sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i g_i^2, \quad \lambda_i \neq -\frac{f(x_n)}{g_i(x_n)} \in k.$$

Affermiamo che  $D' = D - \text{div}F$  soddisfa la tesi. Innanzitutto  $F(x_i) \neq 0 \forall i = 0, \dots, n - 1$  per costruzione; inoltre  $x_1, \dots, x_{n-1} \notin D$  per ipotesi e quindi  $x_1, \dots, x_{n-1} \notin \text{Supp}D'$ .

Si considerino ora  $f$  e le  $g_i$  come elementi di  $\mathcal{O}_{x_n}$ ; poichè le  $g_i$  si annullano su  $D$  si ha, nell'anello locale  $(g_i) \subset (f)$  ovvero  $f \mid g_i$ , da cui segue  $\sum_{i=0}^{m-1} \lambda_i g_i^2 = f^2 h$  per un certo  $h \in \mathcal{O}_{x_n}$ . Ne deduciamo che  $F = f(1 + fh)$ ; inoltre  $(1 + f(x_n)h(x_n)) = 1 \neq 0$  implica che nessuna componente irriducibile



effettiva di  $F$  passa per  $x_n$  oltre a  $D$  e che quindi  $F$  è un'equazione locale di  $D$  in un intorno di  $x_n$ . Essendo peraltro  $\text{div}F$  effettivo,  $x_n$  non può nemmeno essere un polo di  $F$ . Concludiamo, in modo del tutto analogo al caso  $n = 1$ , che dato il divisore  $\text{div}F = D + \sum_l k_l D_l$ , quali che siano, i divisori primi  $D_l$  non conterranno  $x_n$ . Il teorema è provato.  $\square$

*Dimostrazione* di 1.1.4. È in effetti una mera applicazione del Teorema appena dimostrato. Supponiamo che  $D_1, D_2$  abbiano delle componenti in comune. Sia

$$\text{Supp}D_2 = \bigcup_{i=0}^n C_i$$

la decomposizione del supporto in componenti irriducibili con  $C_i \subset D_1$  per qualche  $i$ . Scegliamo  $n$  punti  $x_i \in C_i$  arbitrariamente; per 1.1.5 esisterà  $D'_1 \sim D_1$  tale che  $x_i \notin D'_1$  per ogni  $i = 0, \dots, n$ . Pertanto  $C_i \not\subset \text{Supp}D'_1 \forall i$  e quindi  $D'_1$  e  $D_2$  sono privi di componenti comuni.  $\square$

Nella prossima sezione dimostreremo la bilinearità di  $I$ .

## 1.2 Additività

Per dimostrare (ii) è di fatto sufficiente dimostrare che  $I$  è additiva. Le proprietà di omogeneità rispetto a  $\mathbb{Z}$  discendono dal fatto che  $\text{Div}X$  è un gruppo e quindi la struttura di  $\mathbb{Z}$ -modulo su di esso è quella indotta dall'operazione. La simmetria è ovvia. Se  $I$  è ben definita la dimostrazione ha naturalmente senso se  $D_1$  e  $D'_1$  non hanno componenti in comune con  $D_2$  e questo basta per provare (ii) su tutto  $\text{Div}X$ .

**Teorema 1.2.1.** *Sia  $X$  una superficie proiettiva nonsingolare,  $D_1, D'_1, D_2$  in  $\text{Div}X$  privi di componenti comuni e  $I$  l'applicazione definita in 1.1. Allora*

$$I(D_1 + D'_1, D_2) = I(D_1, D_2) + I(D'_1, D_2).$$

*Dimostrazione.* Per (i) dimostrare l'additività di  $I$  si riduce a dimostrare l'additività della molteplicità locale. Non vi è inoltre perdita di generalità nel supporre tutti e tre i divisori effettivi; in caso contrario ci si può sempre ridurre a tale circostanza scrivendoli come differenza di divisori effettivi e osservare che la definizione preserva la bilinearità.

Siano  $f_1, f_2, g \in \mathcal{O}_x$  equazioni locali rispettivamente di  $D_1, D_2, D'_1$ . È possibile costruire la seguente successione esatta corta

$$O \longrightarrow \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)} \xrightarrow{\cdot g} \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1 g, f_2)} \xrightarrow{\pi} \frac{\mathcal{O}_x}{(g, f_2)} \longrightarrow 0$$

dove con  $\cdot g$  indichiamo la moltiplicazione per  $g$  e con  $\pi$  la riduzione sul terzo quoziente. Da tale successione per l'additività della dimensione sulle successioni esatte (cfr. 1.3.1) otteniamo immediatamente

$$\dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1 g, f_2)} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)} + \dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{(g, f_2)}.$$

Dimostriamo la successione. Sia

$$\begin{aligned} \cdot g : \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)} &\longrightarrow \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1 g, f_2)} \\ h + (f_1, f_2) &\longmapsto hg + (f_1 g, f_2) \end{aligned}$$

È facile verificare che tale applicazione è un omomorfismo ben posto ed è iniettiva. Sia infatti  $h \in \mathcal{O}_x$ ,  $\bar{h}$  la sua immagine nel quoziente, scelto tale che  $\cdot g(\bar{h}) = 0$ . Allora  $hg \in (f_1 g, f_2)$  implica  $gh = \alpha f_1 g + \beta f_2$ ,  $\alpha, \beta \in \mathcal{O}_x$ . Pertanto  $f_2 \mid g(h - \alpha f_1)$  ma  $D'_1$  e  $D_2$  non hanno componenti comuni quindi  $MCD(g, f_2) = 1$ ; per il Lemma di Euclide  $\exists \gamma \in \mathcal{O}_x$  tale che  $f_2 \gamma = (h - \alpha f_1)$  ovvero  $h \in (f_1, f_2)$ . Studiamo invece la mappa

$$\begin{aligned} \pi : \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1 g, f_2)} &\longmapsto \frac{\mathcal{O}_x}{(g, f_2)} \\ h + (f_1 g, f_2) &\longmapsto h + (g, f_2) \end{aligned}$$

È ben posta in quanto  $(f_1 g, f_2) \subset (g, f_2)$ . La suriettività è ovvia. Per quanto riguarda il nucleo riscriviamo  $\pi : \frac{\overline{\mathcal{O}_x}}{(f_1 g)} \longmapsto \frac{\overline{\mathcal{O}_x}}{(g)}$  con  $\overline{\mathcal{O}_x} = \frac{\mathcal{O}_x}{(f_2)}$ ; con

abuso di notazione identifichiamo gli elementi di  $\mathcal{O}_x$  con le loro immagini in quest'ultimo quoziente. Ora  $h \in (g)$  ci dà  $\text{Ker}\pi = \frac{(g)}{(f_1, g)}$ , e, ammettendo che  $g$  non sia uno zero-divisore di  $\overline{\mathcal{O}_x}$ , la moltiplicazione per  $g$  è un automorfismo di  $\overline{\mathcal{O}_x}$ , quindi  $(g) \cong \overline{\mathcal{O}_x}$  e  $(f_1 g) \cong (f_1)$ , di conseguenza  $\text{Ker}\pi \cong \frac{\overline{\mathcal{O}_x}}{(f_1)}$  ovvero  $\text{Ker}\pi = \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)}$ .

L'ultimo dettaglio rimasto è accertarsi che  $g$  non sia uno zero-divisore di  $\overline{\mathcal{O}_x}$ . Sia  $h \in \overline{\mathcal{O}_x}$  tale che  $hg \in (f_2)$ . Allora  $f_2 \mid gh$  ma  $\text{MCD}(f_2, g) = 1$  da cui  $f_2 \mid h$  ossia  $h \in (f_2)$ . Il teorema è dunque provato.  $\square$

### 1.3 Invarianza per equivalenza lineare

Questa terza e ultima sezione del capitolo affronta la proprietà di invarianza per equivalenza lineare di  $I$ , la più delicata delle tre; è proprio il fatto che una tale proprietà sussista che ci permette di poter definire un indice su tutto  $\text{Div}X$ . Il teorema viene enunciato e dimostrato per divisori privi di componenti comuni, il che simultaneamente chiude la questione sulla consistenza della definizione di  $I$  e prova (iii) nella sua generalità.

Il cuore del teorema sta nelle tre proposizioni che vengono qui di seguito enunciate e la cui dimostrazione è posposta a quella del teorema vero e proprio. L'idea del teorema è di scrivere il  $k$ -spazio vettoriale che definisce l'indice locale di intersezione come quoziente successivo delle due equazioni locali e di applicare le proposizioni che seguono sul primo quoziente intermedio, la cui struttura algebrica è ben nota. L'argomento conclusivo viene fornito dal teorema sul grado di un divisore di una curva proiettiva.

Prima di tutto sarà utile ricordare la definizione di lunghezza di un modulo e riassumerne le principali proprietà.

**Definizione 1.3.1.** Un  $A$ -modulo  $M$  si dice di *lunghezza finita come  $A$ -modulo* se esiste una catena di sottomoduli

$$M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \dots \supsetneq M_0 = 0$$

tale che  $\frac{M_i}{M_{i-1}} \cong \frac{A}{P_i}$  per qualche  $P_i \in \text{Max}(A)$ .

Se una tale catena esiste si dimostra che l'indice  $n$  è lo stesso per ogni altra catena (cfr.[8] pag.136, 7.34) . Si definisce in questo caso tale numero *lunghezza di  $M$  come  $A$ -modulo* e si indica  $l_A(M)$ . Se  $A$  è un campo lunghezza come  $A$ -modulo e dimensione come  $A$ -spazio vettoriale coincidono. Ometteremo il pedice quando  $A$  ed  $M$  coincidono. Se  $L, M, N$  sono  $A$ -moduli e

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

è una successione esatta corta allora (cfr.[8] pag.142, 7.41)

$$l_A(M) = l_A(L) + l_A(N).$$

Sarà inoltre utile una piccola precisazione sul significato di un oggetto che incontreremo. Se  $C$  è una curva e  $x$  un punto su di essa è possibile definire il quoziente  $\frac{\mathcal{O}_{x,C}}{(f)}$  dove  $f$  è l'equazione locale di un divisore  $D$ . Consideriamo, in analogia a quanto fatto fino ad ora,  $\dim_k \frac{\mathcal{O}_{x,C}}{(f)}$ ; se  $t \in M$  è un parametro locale di  $x$  si ha, essendo  $\mathcal{O}_{x,C}$  un DVR ( $x$  è una varietà irriducibile in codimensione 1), che  $\exists n > 0$  tale che  $(t^n) = (f_1)$ , e tale  $n$  è la molteplicità di  $D$  in  $x$  che denoteremo  $v_x(D)$ . Quindi secondo quanto dimostrato in 1.1.1 abbiamo la relazione  $\dim_k \frac{\mathcal{O}_{x,C}}{(f)} = \dim_k \frac{\mathcal{O}_{x,C}}{M^n} = n = v_x(D)$ .

**Proposizione 1.3.2.** *Sia data una superficie nonsingolare  $X$  e un divisore effettivo  $D$  di equazione locale  $f$  e si prenda un punto  $x \in \text{Supp}D$ . Siano  $C_1, \dots, C_n$  le componenti irriducibili di  $D$  contenenti  $x$ ,  $P_1, \dots, P_n$  gli ideali primi da esse generati in  $\mathcal{O}_x$  e si ponga  $\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}_x}{(f)}$ . Tutti e soli gli ideali primi minimali di tale anello sono le immagini di  $P_1, \dots, P_n$  in  $\mathcal{O}$ .*

**Proposizione 1.3.3.** *Sia  $(A, M)$  anello locale avente un numero finito di ideali primi minimali  $P_1, \dots, P_n$  e  $a \in A$  non zero-divisore,  $a \notin P_i$  per ogni  $i$ . Vale la seguente relazione*

$$l_k \left( \frac{A}{(a)} \right) = \sum_{i=1}^n c_i l_k \left( \frac{A}{(P_i, a)} \right)$$

con  $k$  campo residuo di  $A$ .

**Proposizione 1.3.4.** *Si consideri una curva (eventualmente singolare)  $C$  e  $D \in \text{CaDiv} C$ . Data una componente  $x$  di  $D$  abbiamo la seguente uguaglianza*

$$v_x(D) = \sum_{\nu(y)=x} v_y(\nu^*(D))$$

dove  $\nu : C^\nu \rightarrow C$  è la normalizzazione e  $\nu^* : C \hookrightarrow C^\nu$  il pull-back indotto.

Armati di queste proposizioni non è difficile dimostrare il teorema.

**Teorema 1.3.5.** *Sia  $X$  una superficie proiettiva nonsingolare e  $D_1, D'_1, D_2, \in \text{Div} X$  con  $D'_1 \sim D_1$  e privi di componenti comuni. Allora*

$$I(D_1, D_2) = I(D'_1, D_2).$$

*Dimostrazione.* Cominciamo con una serie di riduzioni preliminari. Per l'additività di  $I$

$$I(D_1, D_2) = I(D'_1, D_2)$$

equivale a

$$I(\text{div} f, D_2) = 0$$

per un certo  $f \in k(X)$ . Si può oltretutto ipotizzare, a meno di decomporre i divisori nel solito modo e di sfruttare la linearità di  $\text{div}$ , che  $\text{div} f$  e  $D_2$  siano effettivi.

Si consideri per  $x \in X$  il quoziente  $\mathcal{O} = \frac{\mathcal{O}_x}{(f_2)}$ . Siamo nelle ipotesi di 1.3.2 per cui tutti e soli gli ideali primi di  $\mathcal{O}$  sono le immagini  $\overline{P}_1, \dots, \overline{P}_n$  sul quoziente degli ideali primi  $P_1, \dots, P_n \subset \mathcal{O}_x$  corrispondenti alle componenti irriducibili  $C_1, \dots, C_n$  di  $D_2$  che contengono  $x$ . Inoltre  $\mathcal{O}$  è locale (lo è  $\mathcal{O}_x$ ) e indicando con  $\overline{f}$  l'immagine di  $f$  in  $\mathcal{O}$  per la proposizione 1.3.3 con  $a = \overline{f}$

$$(\text{div} f, D_2)_x = l_k \left( \frac{\mathcal{O}_x}{(f, f_2)} \right) = l_k \left( \frac{\mathcal{O}}{(\overline{f})} \right) = \sum_{i=0}^n c_i l_k \left( \frac{\mathcal{O}}{(\overline{P}_i, \overline{f})} \right) \quad (1.1)$$

dove si è usato che  $k \cong \frac{\mathcal{O}_x}{M} \cong \frac{\mathcal{O}}{M}$ . Inoltre

$$\frac{\mathcal{O}}{(\overline{P_i}, \overline{f})} \cong \frac{\frac{\mathcal{O}}{\overline{P_i}}}{(\overline{f})} \cong \frac{\mathcal{O}_{x, C_i}}{(\overline{f})}, \quad C_i = \mathcal{V}(P_i) \quad (1.2)$$

con la solita notazione sul quoziente e usando nell'ultimo passaggio il Teorema del doppio quoziente. Adesso  $f$  induce su  $C_i$  il divisore di Cartier (in generale  $x$  può essere singolare per  $C_i$ ) principale  $D_i = \text{div}(\overline{f}|_{C_i})$ , quindi scriviamo  $I$  usando (1.1), (1.2) ed il fatto che  $l_k\left(\frac{\mathcal{O}_{x, C_i}}{(\overline{f})}\right) = v_x(D_i)$

$$I(\text{div} f, D_2) = \sum_{x \in X} (\text{div} f, D_2)_x = \sum_{i=0}^n c_i \sum_{x \in C_i} v_x(D_i). \quad (1.3)$$

Se  $D_i \in \text{CaDiv} D$  è principale, lo sarà anche il suo pullback in  $C_i^\nu$ , l'inclusione di  $k[C_i]$  nella sua chiusura intera, o meglio  $\nu^*(D_i) = \nu^*(\text{div}(\overline{f}|_{C_i})) = \text{div}(\nu^*(\overline{f}|_{C_i}))$ . Inoltre essendo  $X$  proiettiva tali saranno tutte le  $C_i$  e perciò anche le  $C_i^\nu$ . Sviluppriamo quindi il secondo fattore dell'ultimo membro di (1.3), desingularizzando secondo la proposizione 1.3.4 e applicando poi il teorema sul grado di un divisore su una curva proiettiva nonsingolare (cfr. [7] pag.168, Corollario); ponendo infine  $g = \nu^*(\overline{f}|_{C_i})$  si giunge all'uguaglianza

$$\sum_{x \in C_i} v_x(D_i) = \sum_{y \in C_i^\nu} v_y(\nu^*(D_i)) = \sum_{y \in C_i^\nu} v_y(g) = \text{deg}(\text{div}(g)) = 0$$

che conclude la dimostrazione.  $\square$

Rimangono da provare le tre proposizioni.

*Dimostrazione* di 1.3.2. Ciò è equivalente ad asserire che  $P_1, \dots, P_n$  sono tutti e soli gli ideali primi di  $\mathcal{O}_x$  contenenti  $f_2$ . La minimalità in  $\mathcal{O}$  è implicata dalla minimalità di  $P_1, \dots, P_n$  in  $\mathcal{O}_x$ . Sia  $f_2 \subset P \subset \mathcal{O}_x$  primo minimale. Sia  $P^c$  la sua contrazione nell'algebra dell'aperto affine  $U$  dove  $f_2$  è regolare. Allora  $\mathcal{V}(P^c) \subset \mathcal{V}(f_2) = \cup_{i=0}^n C_i$  quindi siccome  $\mathcal{V}(P^c)$  è irriducibile, o è un punto o una delle  $C_i$ ; nel secondo caso abbiamo già, estendendo nuovamente

nell'anello locale,  $P_i = P^{ce} = P$ . Il primo non può verificarsi. Abbiamo due sottocasi:  $\mathcal{V}(P^c) = x$  che implica  $P = M$  contro la minimalità di  $P$ , oppure  $\mathcal{V}(P^c) = y \neq x$ . In quest'ultima eventualità siccome  $\mathcal{V}(P^c) \not\subset M_x$  l'estensione  $P^{ce} = P$  nella localizzazione è tutto  $\mathcal{O}_x$ .  $\square$

*Dimostrazione di 1.3.3.* Spezziamo ulteriormente la dimostrazione di 1.3.3 in due lemmi.

**Lemma 1.3.6.** *Ogni anello Noetheriano  $A$  possiede una catena di ideali  $A = I_m \supset I_{m-1} \supset \dots \supset I_0 = 0$  tale che*

$$\frac{I_i}{I_{i-1}} \cong \frac{A}{P_i}$$

per qualche  $P_i \in \text{Spec}(A)$ .

*Dimostrazione.* Prendiamo  $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset A$  e tale che  $\text{Ann}(a_i) \subset \text{Ann}(a_{i+1})$ ; per la Noetherianità esiste un  $\bar{a}$  per cui la catena staziona. Scegliamo  $a \in A$  con tale proprietà e dimostriamo che  $\text{Ann}(a)$  è primo. Sia  $bc \in \text{Ann}(a)$ ,  $b \notin \text{Ann}(a)$ . Da  $abc = 0$  segue  $c \in \text{Ann}(ab) \supset \text{Ann}(a)$  quindi per la scelta di  $a$  sarà  $c \in \text{Ann}(a)$ . È facile vedere che l'omomorfismo di  $A$ -moduli dato dalla moltiplicazione per  $a$

$$\begin{aligned} \cdot_a : A &\longrightarrow (a) \\ x &\longmapsto ax \end{aligned}$$

induce un isomorfismo  $\frac{A}{\text{Ann}(a)} \cong (a)$ . Abbiamo così costruito  $I_1 = (a)$ . Ponendo  $A' = \frac{A}{I_1}$  abbiamo un altro anello Noetheriano e possiamo ripetere la costruzione scegliendo un  $a' \in A'$  tale che esiste un ideale primo  $P' = \text{Ann}(a')$ , con  $\frac{A'}{P'} \cong (a')$  e quest'ultimo come noto è della forma  $\frac{I_2}{I_1}$ ,  $I_2$  ideale di  $A$ . Possiamo quindi determinare induttivamente una catena di ideali di  $A$  con la proprietà richiesta e che staziona per Noetherianità.  $\square$

**Lemma 1.3.7.** *Sia  $f : A \longrightarrow B$  un omomorfismo locale iniettivo di anelli locali  $(A, P)$  e  $(B, Q)$ . Sia  $d$  il grado dell'estensione dei campi residui. Un  $B$ -modulo  $M$  ha lunghezza finita come  $B$ - modulo se e soltanto se  $d < \infty$  ed ha lunghezza finita come  $A$ -modulo.*

*Dimostrazione.* Sia  $M = M_n \supsetneq M_{n-1} \supsetneq \dots \supsetneq M_0 = 0$  una catena di sottomoduli con  $n = l_A(M)$ . Per definizione di lunghezza si ha  $\frac{M_i}{M_{i-1}} \cong \frac{B}{Q}$  per ogni  $i$ . Grazie all'additività sulle successioni, data

$$0 \longrightarrow M_{i-1} \longrightarrow M_i \longrightarrow \frac{M_i}{M_{i-1}}$$

avremo  $l_A(M_i) = l_A(M_{i-1}) + l_A\left(\frac{B}{Q}\right)$ . Dato un qualsiasi  $A$ -modulo e un ideale  $I$  di  $A$  è possibile definire su di esso una struttura naturale di  $\frac{A}{I}$  modulo, a patto di scegliere  $I$  nell'annullatore, e la lunghezza rimarrà la stessa (basta considerare la medesima catena). Nel nostro caso  $P \subset Q \subset \text{Ann}\left(\frac{B}{Q}\right)$  quindi

$$l_A\left(\frac{B}{Q}\right) = l_{\frac{A}{P}}\left(\frac{B}{Q}\right) = d$$

coincidendo dimensione e lunghezza su un campo. Sostituendo nella precedente relazione ed iterando  $n$  volte otteniamo la tesi.  $\square$

**Corollario 1.3.8.** *Sia  $R$  un anello locale,  $k$  il campo residuo, e  $M$  un  $R$ -modulo. Abbiamo  $l_R(M) = l_k(M)$ .*

*Dimostrazione.* Basta prendere  $A = k$  e  $B = R$  in 1.3.7.  $\square$

Alla luce di questi fatti sia  $I_m \supset I_{m-1} \supset \dots \supset I_0 = 0$  catena di ideali in  $A$  come dalle ipotesi di 1.3.6. Sia  $P$  l'ideale primo tale che  $\frac{A}{I_{m-1}} \cong \frac{A}{P}$ . Possono darsi due casi:  $P = M$  oppure  $P = P_i$ .

Supponiamo di essere nel primo. La moltiplicazione per  $a$ , non zero divisore per ipotesi, induce il solito isomorfismo di  $A$ -moduli

$$\frac{A}{I_{m-1}} \cong \frac{(a)}{aI_{m-1}}. \tag{1.4}$$



Per ovvie ragioni di inclusione sussistono le due successioni esatte corte tra  $A$ -moduli

$$0 \longrightarrow \frac{(a)}{aI_{m-1}} \longrightarrow \frac{A}{aI_{m-1}} \longrightarrow \frac{A}{(a)} \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \frac{I_{m-1}}{aI_{m-1}} \longrightarrow \frac{A}{aI_{m-1}} \longrightarrow \frac{A}{I_{m-1}} \longrightarrow 0$$

che per l'additività della lunghezza si traducono in

$$l_A \left( \frac{A}{aI_{m-1}} \right) = l_A \left( \frac{(a)}{aI_{m-1}} \right) + l_A \left( \frac{A}{(a)} \right) = l_A \left( \frac{I_{m-1}}{aI_{m-1}} \right) + l_A \left( \frac{A}{I_{m-1}} \right)$$

la quale per (1.4) si riduce a  $l_A \left( \frac{A}{(a)} \right) = l_A \left( \frac{I_{m-1}}{aI_{m-1}} \right)$ .

Il secondo caso è più interessante. Chiamiamo  $\bar{A}$  il quoziente  $\frac{A}{I_{m-1}} \cong \frac{A}{(P_i)}$ . Prendiamo in esame questa volta la successione:

$$0 \longrightarrow I_{m-1} \longrightarrow A \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow 0$$

banalmente esatta. Poichè  $a$  non è uno zero divisore di  $\bar{A}$ , (quest'ultimo è un dominio) da questa deduciamo la successione <sup>1</sup>

$$0 \longrightarrow \frac{I_{m-1}}{aI_{m-1}} \longrightarrow \frac{A}{(a)} \longrightarrow \frac{\bar{A}}{a\bar{A}} \longrightarrow 0$$

e passando alle lunghezze

$$l_A \left( \frac{A}{(a)} \right) = l_A \left( \frac{I_{m-1}}{aI_{m-1}} \right) + l_A \left( \frac{\bar{A}}{a\bar{A}} \right) = l_A \left( \frac{I_{m-1}}{aI_{m-1}} \right) + l_A \left( \frac{A}{(P_i, a)} \right).$$

Per  $j = m - 1, \dots, 0$  ripetiamo lo stesso ragionamento per ogni coppia di elementi successivi  $I_{j-1}$  e  $I_j$  della catena fino ad ottenere

$$l_A \left( \frac{A}{(a)} \right) = \sum_{i=0}^n c_i l_A \left( \frac{A}{(P_i, a)} \right)$$

---

<sup>1</sup>Più in generale se  $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$  è una successione esatta di  $A$ -moduli e  $a \in A$  è tale che  $a \notin \text{Ann}(m) = 0 \forall m \in M''$  allora anche

$$0 \rightarrow \frac{M'}{aM'} \rightarrow \frac{M}{aM} \rightarrow \frac{M''}{aM''} \rightarrow 0$$

è esatta.

dove  $c_i$  è il numero di volte che  $P_i$  appare negli isomorfismi descritti in 1.3.6; tale somma è finita per ipotesi.

Il punto fondamentale è questo; un po' di maquillage mediante il corollario 1.3.8 sull' $A$ -modulo  $\frac{A}{(a)}$ , detto  $k$  il campo residuo, porta l'equazione nella forma

$$l_k \left( \frac{A}{(a)} \right) = \sum_{i=0}^n c_i l_k \left( \frac{A}{(P_i, a)} \right)$$

che è quella desiderata per il teorema.  $\square$

*Dimostrazione* di 1.3.4. Il fatto che  $\nu^*$  sia l'inclusione nella chiusura intera implica che  $\nu^*$  è banalmente un'estensione intera di algebre e quindi  $\nu$  è un morfismo a fibre finite; l'asserto ha dunque senso. Sia

$$\bar{\mathcal{O}} = \bigcap_{\nu(y)=x} \mathcal{O}_y.$$

Esso è un dominio (è sufficiente osservare che gli  $y$  sono punti nonsingolari); per [7], pag.170, Lemma,  $\bar{\mathcal{O}}$  è un  $\mathcal{O}_x$ -modulo finitamente generato. Sia  $f \in k(C)$  equazione locale di  $D$  in  $x$ . Si hanno le seguenti inclusioni:

$$\begin{aligned} f\mathcal{O}_x &\subset \mathcal{O}_x \subset \bar{\mathcal{O}} \\ f\mathcal{O}_x &\subset f\bar{\mathcal{O}} \subset \bar{\mathcal{O}} \end{aligned}$$

da queste ricaviamo le successioni esatte

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \frac{\mathcal{O}_x}{f\mathcal{O}_x} \longrightarrow \frac{\bar{\mathcal{O}}}{f\mathcal{O}_x} \longrightarrow \frac{\bar{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_x} \longrightarrow 0 \\ 0 &\longrightarrow \frac{f\bar{\mathcal{O}}}{f\mathcal{O}_x} \longrightarrow \frac{\bar{\mathcal{O}}}{f\mathcal{O}_x} \longrightarrow \frac{\bar{\mathcal{O}}}{f\bar{\mathcal{O}}} \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

e quindi

$$l_k \left( \frac{f\bar{\mathcal{O}}}{f\mathcal{O}_x} \right) + l_k \left( \frac{\bar{\mathcal{O}}}{f\bar{\mathcal{O}}} \right) = l_k \left( \frac{\mathcal{O}_x}{f\mathcal{O}_x} \right) + l_k \left( \frac{\bar{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_x} \right) \quad (1.5)$$

Al solito, siccome  $\bar{\mathcal{O}}$  è integro, la moltiplicazione per  $f$  induce un isomorfismo  $\frac{\bar{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_x} \cong \frac{f\bar{\mathcal{O}}}{f\mathcal{O}_x}$ , quindi (1.5) diventa

$$l_k \left( \frac{\bar{\mathcal{O}}}{f\bar{\mathcal{O}}} \right) = l_k \left( \frac{\mathcal{O}_x}{f\mathcal{O}_x} \right)$$

ed allora per [7] pag.169, Teorema 2

$$l_k \left( \frac{\mathcal{O}_x}{f\mathcal{O}_x} \right) = l_k \left( \frac{\overline{\mathcal{O}}}{f\overline{\mathcal{O}}} \right) = \sum_{\nu(y)=x} v_y(f) = \sum_{\nu(y)=x} v_y(\nu^*(D)).$$

□

## 1.4 Esempi ed applicazioni

Vediamo qui di seguito alcuni esempi ed applicazioni.

*Esempio 1.* Determiniamo quando, dato  $x \in \text{Supp}D_1 \cap \text{Supp}D_2$ , si ha che  $(D_1, D_2)_x = 1$ . In tale evenienza si ha  $\dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{(f_1, f_2)} = 1 = \dim_k \frac{\mathcal{O}_x}{M}$  e quindi  $(f_1, f_2) = M$ . In sostanza per la nonsingularità di  $x$  ciò avviene se e soltanto se le equazioni locali formano un sistema di parametri locali per  $M$ . Ancora, questo è equivalente a dire che i due supporti si intersecano trasversalmente in  $x$ , cioè, indicando con  $\Theta_{D_i, x}$  la retta tangente in  $x$  a  $D_i$ ,  $\text{codim}_X(\Theta_{D_1, x} \cap \Theta_{D_2, x}) = 2$  e  $x$  è nonsingolare per ambedue i divisori.

*Esempio 2.* Se  $(D_1, D_2)_x > 1$  e  $x$  è nonsingolare per entrambi i divisori allora  $f_1 - f_2 \in M^2$  perchè se ciò non fosse essendo  $\dim \frac{M}{M^2} = 2$  avremmo che  $f_1, f_2$  sono parametri locali in  $x$  in contraddizione con quanto dimostrato in 1. Si dice *ordine di tangenza* di  $D_1$  e  $D_2$  in  $x$  il massimo  $k > 0$  tale che  $f_1 - f_2 \in M^{k+1}$ ; si può dimostrare che  $(D_1, D_2)_x = k + 1$ .

Data una curva  $C$  è possibile calcolare il suo indice di autointersezione definito come  $C^2 = I(C, C)$

*Esempio 3.* Calcoliamo l'indice di autointersezione di una retta  $L \subset \mathbb{P}^2$ . Dato che tutte le rette sono linearmente equivalenti in  $\mathbb{P}^n$  prendiamo due rette distinte. Esse si intersecheranno trasversalmente in un certo  $x \in \mathbb{P}^2$  e quindi  $L^2 = 1$ .

È tuttavia possibile, ed anche particolarmente significativo, che una curva abbia autointersezione negativa. Tale caratteristica è propria di divisori

contratti in un punto da un'applicazione birazionale, e sarà la chiave di volta dei teoremi del prossimo capitolo.

Poichè l'indice di intersezione è sostanzialmente definito modulo equivalenza lineare, conoscere il gruppo delle classi di  $X$  è tutto ciò che è necessario per determinare l'indice di intersezione di due divisori, come nel seguente, elementare, caso.

*Esempio 4.* Sia  $X = \mathbb{P}^2$ . Sappiamo che  $\text{Cl}X \cong \mathbb{Z}$ . Prendiamo una retta  $L$  come generatore e quindi ogni  $D_1, D_2 \in \text{Div}X$  sarà  $D_i \sim k_i D_i$ ,  $k_i = \deg(D_i)$ . Pertanto

$$I(D_1, D_2) = k_1 k_2 L^2 = k_1 k_2$$

e questa è una possibile dimostrazione del Teorema di Bézout.

*Esempio 5.* Una situazione concreta di intersezione doppia: prendiamo la retta verticale  $C_1 = \mathcal{V}(x_1 - x_0)$ , e la circonferenza  $C_2 = \mathcal{V}(x_1^2 + x_2^2 - x_0^2)$  che si intersecano nel punto  $p = [1 : 1 : 0]$ . Osserviamo che nell'anello locale di  $p$  si ha che  $(x, x^2 + y^2) \subset (x^2, xy, y^2) = M^2$  essendo

$$x^2 + y^2 - x = x(x - 1) + y^2 = x^2 \frac{x - 1}{x} + y^2.$$

Per il teorema di Bézout  $I(C_1, C_2) = 2$  e quindi  $p$  è l'unico punto di intersezione, ha ordine di tangenza 1 e  $I(C_1, C_2)_p = 2$  come era lecito attendersi.

# Capitolo 2

## Risoluzione di singolarità e teoremi di decomposizione di applicazioni birazionali

In questo capitolo esamineremo in dettaglio la struttura delle applicazioni razionali tra superfici. Come vedremo la loro struttura è facilmente descrivibile ; sono in effetti una composizione di morfismi birazionali elementari, i cosiddetti *scoppiamenti*.

Uno scoppimento intuitivamente può essere inteso come un “estensione” minima di una superficie eseguita rispetto ad un luogo “piccolo”, un punto nel nostro caso (ma la nozione si generalizza), la cui fibrazione in tale estensione sia un luogo “grande”.

### 2.1 Scoppiamenti

Cominciamo col definire rigorosamente la nozione di scoppimento di una superficie rispetto ad un punto.

**Proposizione/Definizione 2.1.1.** *Sia  $X$  una superficie proiettiva nonsin-*

golare. Esiste una superficie  $\hat{X}$  ed un'applicazione biregolare  $\sigma : \hat{X} \rightarrow X$ , uniche a meno di isomorfismi, tali che

1.  $\hat{X} \setminus \sigma^{-1}(x)$  è isomorfa a  $X \setminus \{x\}$ ;
2.  $E = \sigma^{-1}(x)$  è isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ .

Diremo che  $\sigma$  è lo scoppiamento di  $X$  in  $x$  (o di centro  $x$ ) ed  $E$  è la fibra eccezionale.

*Dimostrazione.* Si consideri una superficie proiettiva nonsingolare  $X$  e la proiezione  $\Pi_x : X \dashrightarrow \mathbb{P}^1$  di centro  $x$ , ovvero non definita in  $x$ . Il grafico di tale applicazione

$$\Gamma_\Pi = \{(x, \Pi(x)), x \in X\}$$

è isomorfo in modo naturale a  $X \setminus \{x\}$ . Prendendo la chiusura del grafico abbiamo la nostra superficie  $\hat{X} = \bar{\Gamma}_\Pi \subset X \times \mathbb{P}^1$ . Infatti se definiamo  $\sigma$  come la proiezione  $\sigma : \bar{\Gamma}_\Pi \rightarrow X$  si ha anche  $\sigma^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{P}^1$  ed abbiamo dimostrato 1 e 2.  $\square$

Un'altra possibile costruzione di  $\hat{X}$  è di natura locale, ma ci dà informazioni esplicite sulle coordinate locali della varietà esplosa  $\hat{X}$ . Prendiamo un intorno affine  $U$  di  $x$  in cui esistono  $u$  e  $v \in k(U)$  che determinano un sistema di parametri locali in  $x = (0, 0)$  e in  $x$  soltanto. Definiamo  $\hat{U} = \mathcal{V}(ux_1 - vx_0) \subset U \times \mathbb{P}^1$  e sia  $\sigma : \hat{U} \rightarrow U$  la proiezione dal prodotto. Abbiamo

$$\sigma^{-1}(x) = \sigma^{-1}(0, 0) = (0, 0, [x_0 : x_1]) \cong \mathbb{P}^1.$$

Inoltre comunque data un'espressione locale di  $\hat{U}$  mediante coordinate  $u'$  e  $v'$ ,  $\hat{U} \setminus \sigma^{-1}(x) = (u', v', 0, 0)$ , con  $u'$  e  $v'$  non entrambi nulli; quest'ultimo insieme è isomorfo per proiezione a  $U \setminus \{x\}$ . Ancora una volta si ottiene  $\hat{X}$  considerando la chiusura di  $\hat{U}$ , che è a volte detto lo *scoppiamento locale* di  $X$ .

Se consideriamo l'aperto  $\hat{U} \setminus \mathcal{V}(x_0)$  possiamo scrivere le coordinate nella forma

$$u, \quad v = ut, \quad t = x_1/x_0 \quad (2.1)$$

il che ci sarà utile più avanti.

Si noti infine che  $\sigma_1^{-1}(0,0) = E$  implica  $u = 0, ut = 0$  e dunque  $u$  è l'equazione locale di  $E$  in tale aperto.

*Esempio 6.* L'esempio più celebre è quello dello scoppimento del piano proiettivo in un punto. Sia  $X = \mathbb{P}^2$  e  $p = [0 : 0 : 1]$  e si consideri la proiezione

$$\begin{aligned} \Pi_p : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\longmapsto [x_0 : x_1] \end{aligned}$$

Il grafico della proiezione su  $\mathbb{P}^1$  è un chiuso nella forma parametrica  $\Gamma = \{[x_0 : x_1 : x_2 : x_0 : x_1] \mid x_i \in k\} \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$ . Diamo a tale insieme una struttura di varietà mediante l'immersione  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$  data dall'applicazione di Segre. Nel far ciò otteniamo

$$\sigma_{1,2}(\Gamma) = \{[x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_1 : x_1^2 : x_0x_2 : x_1x_2], x_i \in k\}$$

che può essere a sua volta tranquillamente immerso nell'iperpiano  $y_1 = y_2$  quindi in definitiva in  $\mathbb{P}^4$ : dopo un opportuno cambio di variabili

$$\Gamma = \{[x_0^2 : x_0x_1 : x_1^2 : x_0x_2 : x_1x_2], x_i \in k\} \quad (2.2)$$

che è un'espressione dello scoppimento in un aperto denso. Da tale forma parametrica ricaviamo

$$\bar{\Gamma} = \mathcal{V}(y_1y_4 - y_2y_3, y_0y_4 - y_1y_3, y_1^2 - y_0y_2) \quad (2.3)$$

con  $[y_0 : y_1 : y_2 : y_3 : y_4 : y_5]$  coordinate omogenee su  $\mathbb{P}^4$ . Tali equazioni si annullano infatti su (2.2) e in  $\bar{\Gamma}$  non ci sono altre intersezioni residue da

eliminare oltre alla varietà  $\mathcal{V}(y_3, y_4)$ . Capiamo quindi che l'espressione (2.2) è valida nell'aperto  $\bar{\Gamma} \setminus \mathcal{V}(y_0, y_2)$ . D'altronde sostituendo  $y_2 = y_0 = 0$  in 2.3 otteniamo luogo  $L = \{[0 : 0 : 0 : y_3 : y_4] \subset \bar{\Gamma}\}$  quindi

$$\begin{aligned} \sigma : \bar{\Gamma} &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ \Gamma &\longmapsto [y_0 : y_1 : y_3] \quad y_0 \neq 0, y_1 \neq 0 \\ [0 : 0 : 0 : y_3 : y_4] &\longmapsto [0 : 0 : 1] \end{aligned}$$

è lo scoppimento di  $\mathbb{P}^2$  in  $p$  ed  $L$  è la sua fibra eccezionale.

**Definizione 2.1.2.** Si prenda un divisore primo  $C$  che passa per  $x$ ; la sua preimmagine consiste nella varietà quasiproiettiva  $\sigma^{-1}(C \setminus \{x\}) \cup E$  (cfr.[7] pag.118, Teorema 1). La chiusura proiettiva di  $\sigma^{-1}(C \setminus \{x\})$  è detta *trasformata birazionale* di  $C$ .

Ci avvicineremo al teorema di risoluzione di indeterminazione con una serie di passaggi intermedi.

**Proposizione 2.1.3.** *Sia  $\sigma : \hat{X} \longrightarrow X$  uno scoppimento in  $x$  e  $C$  come sopra. Allora*

$$\sigma^*(C) = C' + kE$$

dove  $k$  è la molteplicità di  $C$  in  $x$ .

*Dimostrazione.* Per definizione di trasformata birazionale e per le proprietà di  $\sigma$  abbiamo in generale

$$\sigma^*(C) = hC' + mE$$

e  $h = 1$  perchè  $\sigma$  induce un isomorfismo tra  $C'$  e  $C \setminus \{p\}$ ; bisogna mostrare  $m = k$ . Prendiamo dei parametri locali  $u, v$  in  $x$ . Se  $f$  è l'equazione locale di  $C$  in un intorno di  $x$  si ha  $f \in M^k \subset \mathcal{O}_x$ . Consideriamo l'espansione di  $f$  nell'anello formale; essa sarà nella forma

$$f = F_k(u, v) + F_{k+1}(u, v) + \dots$$



con gli  $F_i$  polinomi omogenei di grado  $i \geq k$  a coefficienti in  $\mathcal{O}_x$ . Poichè  $\sigma^{-1}(x) = E$ ,  $\sigma^*(f)$  definisce un'equazione locale di  $\sigma^*(C)$  in un intorno di  $E$ , cioè  $\sigma^*(f) \in \mathcal{O}_{E,X}$ ; ripetiamo la costruzione già fatta di  $\hat{U}$ . Rispetto all'aperto  $\hat{U} \setminus \mathcal{V}(x_0)$  le coordinate  $(u, v)$  su  $U$  nell'immagine di  $\sigma$  assumeranno la forma (2.1) e pertanto

$$\sigma^*(f) = f(u, ut) = F_k(u, ut) + F_{k+1}(u, ut) + \dots = u^k(F_k(1, ut) + F_{k+1}(1, ut) + \dots)$$

il che vuol dire  $\sigma^*(f) \in M^k \subset \mathcal{O}_E$  ovvero  $v_E(\sigma^*(f)) = k$  che è l'asserto.  $\square$

*Ossevazione 1.* Se invece di una curva consideriamo un generico divisore  $D$  il lemma è ancora valido. Definendo molteplicità di  $D = \sum l_i C_i$  in  $x$  il numero  $m = \sum l_i v_x(C_i)$  e la trasformata birazionale di  $D$  come  $D' = \sum l_i C'_i$ , per linearità si ottiene  $\sigma^*(D) = D' + mE$ .

*Esempio 7.* Ci proponiamo di trovare la trasformata birazionale della cuspidale  $C = \mathcal{V}(x_1^3 - x_0^2 x_2)$  tramite lo scoppimento dell'esempio 6 nel punto singolare  $[0 : 0 : 1]$ . Scegliamo l'intorno affine in cui  $x_2 \neq 0$  e date  $(x, y)$  coordinate affini e  $(x, xt, t)$  coordinate nel corrispondente aperto dello scoppimento locale  $\hat{U}$  si ha

$$\sigma^{-1}(C) = \sigma^{-1}(\mathcal{Z}(x^3 - y^2)) = \mathcal{Z}(x^2(x - t^2)).$$

Pertanto la fibra eccezionale è la curva in coordinate disomogenee  $(0, 0, t)$  data dall'annullarsi del primo fattore, mentre la chiusura di  $\mathcal{V}(x - t^2)$  in  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$  è la trasformata birazionale di  $C$ ; tale curva interseca  $E$  in  $(0, 0)$ . Notiamo che mentre  $C'$  è isomorfa a  $\mathbb{P}^1$   $C$  non lo è, dunque in generale la trasformata birazionale di una curva *non* è isomorfa alla curva stessa se questa non è liscia. Infine per la proposizione 2.1.3, come è anche evidente dando uno sguardo a  $\sigma^{-1}(C)$ ,  $\sigma^*(C) = C' + 2E$ . Ciò è chiaramente motivato dal fatto che  $[0 : 0 : 1]$  è un punto doppio di  $C$ .

Diamo adesso una serie di risultati direttamente concernenti la molteplicità di intersezione tra divisori.

**Proposizione 2.1.4.** *Sia  $\phi : X \rightarrow Y$  un'applicazione regolare birazionale.*

1. *Se  $D_1, D_2 \in \text{Div}Y$  allora*

$$I(\phi^*(D_1), \phi^*(D_2)) = I(D_1, D_2);$$

2. *Se  $\phi$  è uno scoppimento,  $\bar{D}$  un divisore di  $X$  il cui supporto è la fibra eccezionale e  $D \in \text{Div}Y$  allora*

$$I(\bar{D}, \phi^*(D)) = 0.$$

*Dimostrazione.* Sia  $S \subset Y$  l'insieme finito di punti dove  $\phi^{-1}$  non è regolare; evidentemente

$$X \setminus \phi^{-1}(S) \cong Y \setminus S. \quad (2.4)$$

Se  $\text{Supp}D_1 \cap S = \text{Supp}D_2 \cap S = \emptyset$  e  $D_1$  e  $D_2$  sono privi di componenti comuni la conclusione segue da (2.4), altrimenti ci riduciamo a questo caso applicando il Teorema 1.1.5 e quindi per 1.3.5 (eventualmente applicato due volte) e per (2.4)

$$I(D_1, D_2) = I(D'_1, D'_2) = I(\phi^*(D'_1), \phi^*(D'_2)) = I(\phi^*(D_1), \phi^*(D_2))$$

essendo  $\phi^*(D'_1) \sim \phi^*(D_1)$ .

Per quanto riguarda 2 la conclusione è parimenti ovvia se  $\text{Supp}D \cap S = \emptyset$  perchè in tal caso  $\phi^*(D)$  non contiene alcun elemento di  $\phi^{-1}(S)$ , e non può dunque certo intersecare una fibra eccezionale. In caso contrario ci riduciamo a questa ipotesi usando il Teorema 1.1.5 e ripetiamo quanto argomentato per 1. □

**Corollario 2.1.5.** *Sia  $\sigma : \hat{X} \rightarrow X$  lo scoppimento in  $x \in X$  e  $E$  la fibra eccezionale. Abbiamo  $E^2 = -1$ .*

*Dimostrazione.* Scriviamo le equazioni locali di  $X$  in  $\hat{U} \setminus \mathcal{V}(x_0)$  come in (2.1) con  $(u, v)$  parametri locali in un intorno  $U$  del centro dello scoppimento. Esaminiamo la curva proiettiva  $C$  di equazione locale  $v = 0$  in  $U$ . Siccome  $u$  è l'equazione locale di  $E$  giocoforza l'equazione della trasformata birazionale di  $C$  deve essere  $t$ , ossia  $C'$  ed  $E$  si intersecano trasversalmente nel punto  $[0 : 0 : 1 : 0]$ . Pertanto per 2.1.3  $\sigma^*(C) = C' + E$  e applicando 2.1.4

$$0 = I(\sigma^*(C), E) = I(C' + E, E) = I(C', E) + E^2 = 1 + E^2.$$

□

Abbiamo così definito due importanti proprietà di una fibra eccezionale; è isomorfa a  $\mathbb{P}^1$  ed ha autointersezione negativa. Si può provare che tali proprietà definiscono completamente una fibra eccezionale (detta anche in questo contesto *1-curva*); ovvero data una mappa regolare birazionale da una superficie liscia  $f : Y \rightarrow X$  se esiste una curva  $C = f^{-1}(p)$  in  $Y$  per qualche  $p \in X$  che verifica  $C^2 = -1$  e  $C \cong \mathbb{P}^1$  allora  $f$  è lo scoppimento di  $X$  in  $p$  e  $C$  è la sua fibra eccezionale. Tale teorema va sotto il nome di *Criterio di contraibilità di Castelnuovo* (cfr.[1] pag.20 Teorema II.17).

## 2.2 Sistemi lineari di divisori e Teorema di Eliminazione di Indeterminazione

Il teorema che dimostreremo nella presente sezione ci rivela qual'è la maniera corretta di interpretare uno scoppimento: come già si poteva intuire esso costituisce fondamentalmente la risoluzione delle singolarità di un'applicazione razionale, nel senso che la composizione di un'applicazione razionale

con un certo scoppamento del dominio avrà un numero inferiore di punti di non regolarità rispetto all'applicazione data.

Tale teorema è un'elegante applicazione di alcuni aspetti della teoria dei sistemi lineari di divisori su varietà che brevemente descriveremo.

**Definizione 2.2.1.** Sia  $X$  una varietà nonsingolare,  $D \in \text{Div}X$ . L'insieme

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in k(X) \mid \text{div}f + D \geq 0\} \cup \{0\}$$

costituisce, con le usuali operazioni tra funzioni, un  $k$ -spazio vettoriale finito-dimensionale detto *spazio vettoriale associato a  $D$* . Il fatto che costituisca uno spazio vettoriale è immediato; per una dimostrazione della finitezza della dimensione cfr.[7] pag.161 , Teorema 5.

Si consideri una classe di equivalenza  $\mathcal{C}$  di divisori,  $D \in \mathcal{C}$ . Se  $f \in \mathcal{L}(D)$  si ha che  $D_f = D + \text{div}f$  è un divisore effettivo contenuto in  $\mathcal{L}(D)$ . Viceversa se un divisore in  $\mathcal{C}$  è effettivo allora è necessariamente nella forma  $D' = \text{div}f' + D$ , con  $f'$  determinata a meno di un fattore in  $k$ . Si può dunque identificare l'insieme dei divisori effettivi linearmente equivalenti a  $D$  con l'insieme dei sottospazi lineari di  $\mathcal{L}(D)$  di dimensione 1, ovvero con lo spazio proiettivo  $\mathbb{P}(\mathcal{L}(D))$ , che indichiamo  $|D|$ . Si dice *sistema lineare di divisori* un sottospazio lineare  $M \subset |D|$  che sarà per forza di cose nella forma  $M = \{\text{div}F - D, F \in M^0\}$  per un certo sottospazio vettoriale  $M^0 \subset \mathcal{L}(D)$ . Se  $M = |D|$  (o equivalentemente se  $M^0 = \mathcal{L}(D)$ )  $M$  si dirà *completo*. La dimensione di un sistema lineare di divisori è la sua dimensione come spazio proiettivo.

**Definizione 2.2.2.** Sia  $M$  un sistema lineare di divisori. Un punto  $x \in X$  contenuto in  $\text{Supp}D$  per ogni  $D$  in  $M$  si dice *punto base* di  $M$ . Diremo invece *parte fissa* di  $M$  il più grande divisore  $F$  tale che  $F \subset D$  per ogni  $D \in M$ , ovvero un divisore  $F$  tale che  $D - F$  è effettivo per ogni  $D \in M$  e massimale rispetto a tale proprietà.

I sistemi lineari sono uno strumento particolarmente potente perchè ci permettono di definire un certo genere di applicazioni razionali in termini di divisori, nel seguente modo. Siano  $F_i$  polinomi omogenei e

$$\begin{aligned} \phi : X &\dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ [x_0 : \dots : x_m] &\longmapsto [F_0[x_0 : \dots : x_m] : \dots : F_n[x_0 : \dots : x_m]] \end{aligned}$$

un'applicazione razionale tale che  $\phi(X)$  non sia contenuta in alcun iperpiano di  $\mathbb{P}^n$ . Definendo  $D = \text{div} MCD(F_0, \dots, F_n)$  i divisori  $D_i = \text{div} F_i - D$  risultano essere effettivi, cioè tutte le  $F_i$  sono in  $\mathcal{L}(-D)$ , e quindi  $\sum_i \lambda_i F_i \in \mathcal{L}(-D) \forall \lambda_i \in k$ . In altre parole le funzioni in  $\langle F_0, \dots, F_n \rangle$  definiscono un sistema lineare di divisori  $M \subset |-D|$  di dimensione  $n$ ; se infatti fosse  $\sum_j \lambda_j F_j = 0$  per qualche  $j$  e con i  $\lambda_j$  non tutti nulli vorrebbe dire che l'immagine di  $X$  può essere immersa in tale iperpiano. Inoltre  $M$  non ha parte fissa; infatti, per come è stato definito,  $D$  è contenuto in tutti gli elementi di  $M$  ed è il più grande con tale proprietà.

Viceversa è chiaro che un sistema lineare di divisori  $M$  senza parte fissa definisce un'applicazione razionale  $\phi$  mediante i generatori  $(F_0, \dots, F_n)$  dello spazio vettoriale  $M^0$  associato; l'indipendenza lineare di tali funzioni garantisce il fatto che l'immagine di  $\phi$  non sia contenuta in un iperpiano di  $\mathbb{P}^n$ .

Abbiamo dunque dimostrato il seguente

**Teorema 2.2.3.** *Sia  $X$  una superficie. Esiste una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi*

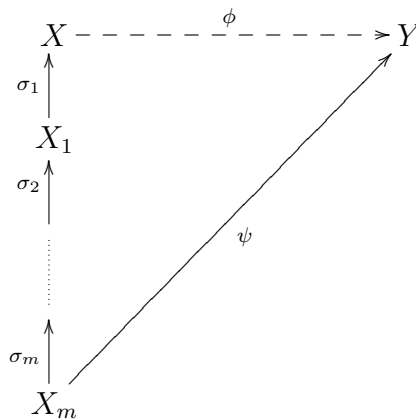
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Applicazioni razionali } \phi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n \\ \text{tali che } \phi(X) \text{ non è contenuta in} \\ \text{alcun iperpiano} \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Sistemi lineari di divisori} \\ \text{di dimensione } n \text{ e privi} \\ \text{di parte fissa} \end{array} \right\}$$

Terminiamo con un'ultima importante osservazione; il luogo dei punti di indeterminazione di un'applicazione razionale corrisponde al luogo dei punti

base del sistema lineari di divisori ad essa associata secondo 2.2.3. In particolare un'applicazione è regolare se e soltanto se il sistema lineare di divisori associato è privo di punti base. È opportuno notare il fatto che stiamo usando in maniera determinante che il luogo di indeterminazione di  $X$  è finito, e quindi il fatto che  $X$  sia bidimensionale.

Si è ora in possesso dei mezzi necessari per dimostrare agevolmente il fondamentale

**Teorema 2.2.4 (Eliminazione del luogo di indeterminazione).** *Sia  $X$  una superficie proiettiva nonsingolare,  $Y \subset \mathbb{P}^n$  una varietà proiettiva e  $\phi : X \dashrightarrow Y$  un'applicazione razionale. Allora esistono  $m$  scoppiamen-  
ti  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ ,  $\sigma_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ , tali che  $\psi = \phi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \dots \circ \sigma_m : X_m \rightarrow Y$   
è regolare, ovvero il diagramma*



*commuta.*

*Ossevazione 2.* La condizione di nonsingolarità è puramente tecnica; il risultato è vero anche sotto ipotesi più generali su  $X$ .

**Dimostrazione.** Essendo  $X$  liscia  $\phi$  avrà soltanto un numero finito di punti di indeterminazione. Possiamo supporre, a meno di considerare spazi proiettivi di dimensione minore di  $n$ , che  $Y$ , e quindi  $\phi(X)$ , non sia contenuta in alcun iperpiano. Siamo pertanto nelle ipotesi del Teorema 2.2.3;

consideriamo dunque il sistema lineare di divisori  $P \subset |D|$ , con  $-D$  come dalla dimostrazione di 2.2.3, associato a  $\phi$ . Prendiamo un punto base in  $P$ , cui corrisponderà una singolarità  $x$ , e scoppiamo in tale singolarità;  $\sigma_1 : X_1 \rightarrow X$ . Il pullback  $\sigma_1^*$  induce un morfismo  $\sigma_1^*(P) \subset |\sigma_1^*(D)|$ . Per 2.1.3 esiste un certo  $k$ , pari al minimo delle molteplicità in  $x$  tra tutti gli elementi di  $P$ , tale che  $kE$  rappresenta la parte fissa di  $\sigma_1^*(P)$ , e quindi

$$P_1 = \{C' - kE, C \in P\} \subset |\sigma_1^*(D) - kE| = |D_1|$$

non ha parte fissa. Associamo a questo sistema lineare una nuova applicazione razionale  $\phi_1 = \phi \circ \sigma_1 : X_1 \dashrightarrow Y$ . Possiamo ripetere il processo definendo induttivamente una successione  $\sigma_j$  ed una  $P_j \subset |D_j|$  dove  $D_j = D'_{j-1} = \sigma_j^*(D_{j-1}) - k_j E_j$ . La tesi sarà dimostrata se riusciamo a provare che i punti base di  $D_j$  sono minori di quelli di  $D_{j-1}$ ; in tal caso perverremo infatti ad un  $P_m$  privo di punti base e quindi ad una mappa regolare. Bisogna innanzitutto stimare il numero massimo di punti base per ogni sistema lineare completo  $|D_j|$ . Sicuramente se  $C_{jl}$  sono divisori in  $D_j$ , che ricordiamo non ha parte fissa, essendo  $C_{jl} \sim D_j$

$$0 < |\{x \in \cap_l \text{Supp} C_{jl}\}| \leq I(C_{j1}, C_{j2}) = D_j^2.$$

Ma usando la proposizione 2.1.5, (1) e (2), e il corollario 2.1.4 otteniamo

$$D_j^2 = (\sigma_j^*(D_{j-1}) - k_j E_j)^2 = \sigma_j^*(D_{j-1})^2 - 2k_j I(\sigma_j^*(D_{j-1}), E_j) - k_j^2 = D_{j-1}^2 - k_j^2$$

cosicchè esiste un  $m$  tale che  $|D_m|$  non ha punti base.  $\square$

In aggiunta alla tesi è stato anche descritto un algoritmo costruttivo per risolvere  $\phi$  e stimato il numero di iterazioni ( $D^2$ ) necessarie per farlo.

*Esempio 8.* Diamo un esempio esplicito di risoluzione in scoppiamenti prendendo in analisi la trasformazione quadratica

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\longmapsto [x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1] \end{aligned}$$

I punti in cui  $f$  non è regolare sono

$$p_0 = [1 : 0 : 0], \quad p_1 = [0 : 1 : 0], \quad p_2 = [0 : 0 : 1]$$

Si prenda lo scoppimento  $\sigma_1$  in  $p_0$ ; la mappa  $\sigma_0$  sarà regolare sulla fibra eccezionale  $E_0 = \sigma_0^{-1}(p_1)$ . Scrivendo le equazioni di  $f \circ \sigma_0$  nel solito aperto  $\hat{U} \setminus \mathcal{V}(x_0)$  usando le (2.1) abbiamo infatti che

$$f \circ \sigma_0(u, ut, t) = f[1 : u : ut] = [u^2t : ut : u] = [ut : t : 1]$$

pertanto  $f \circ \sigma_0$  è regolare in  $\sigma_0^{-1}(p_1)$ . Analogamente  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  eliminano  $p_1$  e  $p_2$ .

## 2.3 Proprietà universale dello scoppimento e teorema di fattorizzazione

Questa sezione discute ulteriori particolarità di applicazioni tra superfici. La proprietà di universalità di cui lo scoppimento gode asserisce la possibilità, sotto l'ipotesi di birazionalità, di poter in un certo senso operare un processo inverso a quello appena visto nel teorema sull'eliminazione di singolarità, ovvero fattorizzare una mappa birazionale scoppiando il codominio. Concludiamo il capitolo con il teorema di fattorizzazione, che rappresenta il risultato principale di tutto quanto argomentato sin qui; esso è il teorema di struttura delle applicazioni tra superfici a cui si è già riferito.

D'ora in poi, data una superficie  $X$ , per immagine di una curva  $C \subset X$  mediante un'applicazione razionale  $\phi$ , definita su tutta  $X$  tranne al più un insieme finito  $S$ , intenderemo  $\overline{\phi(C \setminus S)}$ .

Introduciamo innanzitutto un lemma di carattere generale, che già sappiamo valere per gli scoppiamenti

**Lemma 2.3.1.** *Sia  $\phi : X \rightarrow Y$  un'applicazione regolare birazionale tra*



superfici con  $Y$  liscia ed  $X$  irriducibile. Allora se  $\phi^{-1}$  non è definita in  $y$  esiste una curva  $C \subset X$  tale che  $\phi(C) = \{y\}$ .

*Dimostrazione.* Non è riduttivo supporre  $X$  affine per la birazionalità di  $\phi$ , a meno di restringersi ad un aperto che intersechi  $\phi^{-1}(y)$ . In tal caso per ogni  $p$  nell'aperto di definizione di  $\phi^{-1}$

$$\phi^{-1} = (h_1(p), \dots, h_n(p)), h_i \in k(Y).$$

Supponiamo ora ad esempio  $h_1 \notin \mathcal{O}_{y,Y}$ ; per la nonsingolarità di  $Y$ ,  $\mathcal{O}_{y,Y}$  risulta essere un UFD quindi possiamo scrivere  $h_1 = \frac{f}{g}$  con  $f, g \in \mathcal{O}_y$  coprimi e  $g(y) = 0$ . Consideriamo  $C = \mathcal{V}(\phi^*(g))$ ; siccome  $\phi$  è regolare è definita in  $\phi^{-1}(y)$  abbiamo

$$g(y) = 0 \Leftrightarrow \phi^*(g)(\phi^{-1}(y)) = 0 \Leftrightarrow \phi^{-1}(y) \subset C \Leftrightarrow y \in \phi(C).$$

D'altra parte  $x_1 = h_1 \circ \phi(x_1)$ ,  $x_1$  prima coordinata di  $X$ , dunque per definizione di pull-back sul campo delle funzioni razionali  $x_1 \phi^*(g) = \phi^*(f)$ . Ciò implica che  $C$  è una componente di  $\mathcal{V}(\phi^*(f))$  perciò

$$C \subset \mathcal{V}(\phi^*(f), \phi^*(g)) = \phi^{-1}(\mathcal{V}(f, g))$$

ma essendo  $MCD(f, g) = 1$ ,  $\mathcal{V}(f, g)$  è finito, cioè  $\phi(C) = \{y_1, \dots, y_m\}$ . A meno di considerare un aperto affine  $U$  di  $Y$  contenente soltanto  $y$  e di intersecare  $C$  con  $\phi^{-1}(U)$  abbiamo  $\phi(C) = \{y\}$ .  $\square$

Facciamo un ulteriore passo in avanti lasciando cadere l'ipotesi di regolarità.

**Lemma 2.3.2.** *Sia  $\phi : X \rightarrow Y$  un'applicazione birazionale tra superfici proiettive nonsingolari tale che  $\phi^{-1}$  non sia definita in  $y \in Y$ . Allora esiste una curva  $C$  tale che  $\phi(C) = \{y\}$ .*

*Dimostrazione.* Sostituiamo  $X$  ed  $Y$  con due loro aperti densi isomorfi  $U$  e  $V$ . Prendiamo in  $U \times V$  la chiusura del grafico  $\Gamma_\phi$ . Essa è una superficie irriducibile, non necessariamente liscia, le due proiezioni  $\pi_1 : \bar{\Gamma}_\phi \rightarrow U$ ,  $\pi_2 : \bar{\Gamma}_\phi \rightarrow V$  sono regolari, ed il diagramma di fattorizzazione nel grafico commuta. Sia  $y \in Y$  un punto dove  $\phi^{-1}$  non è definita. Siccome  $\pi_1$  è regolare in  $y$  e  $\phi^{-1}$  non lo è, non lo sarà nemmeno  $\pi_2^{-1}$ ; per il lemma precedente esiste una curva  $C \in \bar{\Gamma}_\phi$  tale che  $\pi_2(C) = \{y\}$ . Quindi  $\pi_1(C)$  è una curva di  $X$  tale che  $\phi(C) = \pi_2 \circ \pi_1^{-1}(C) = \{y\}$ ; se fosse infatti un punto da  $\pi_1(C) = \{y\}$  otterremmo  $C = (y, \phi(y))$ , contro la natura di  $C$ .  $\square$

**Proposizione 2.3.3 (Proprietà universale dello scoppimento).** *Siano date due superfici proiettive nonsingolari  $X$  ed  $Y$  e  $\phi : X \rightarrow Y$  regolare birazionale tale che  $\phi^{-1}$  non è definita in  $y$ . Allora esiste un'unica applicazione regolare birazionale  $\psi$  tale che  $\phi = \sigma \circ \psi$  dove  $\sigma$  è lo scoppimento di  $Y$  in  $y$ .*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & Y \\ & \searrow \psi & \nearrow \sigma \\ & \hat{Y} & \end{array}$$

*Dimostrazione.*  $\psi = \sigma^{-1} \circ \phi$  rende il diagramma commutativo ed è ovvio che è l'unica a farlo. Occorre dimostrare che è regolare. Supponiamo per assurdo che esista  $x \in X$  in cui  $\psi$  non è regolare; per 2.3.2 esiste una curva  $L \in \hat{Y}$  tale che  $\psi^{-1}(L) = \{x\}$ . Si ricordi che per ipotesi esisterà un insieme finito  $S$  in cui  $\psi^{-1}$  non è regolare pertanto la commutatività del diagramma va ristretta a  $L \setminus S$ ; allora essendo  $\sigma$  lo scoppimento,  $y = \sigma(L) = \phi(x)$  ed  $L$  è la fibra eccezionale. Affermiamo ora che la trasformazione lineare

$$d_x \phi : \Theta_{x,X} \rightarrow \Theta_{y,Y}$$

è un isomorfismo di spazi vettoriali. Accanto al diagramma di sopra abbiamo i diagrammi commutativi

$$\begin{array}{ccc}
\Theta_{x,X} & \xrightarrow{d_x\phi} & \Theta_{y,Y} \\
& \searrow d_x\psi & \nearrow d_{y'}\sigma \\
& & \Theta_{y',\hat{Y}}
\end{array}$$

definiti per ogni  $y' \in L \setminus S$ . Sarà sufficiente mostrare che  $d_x\phi$  è suriettivo. Se non lo fosse avremmo in particolare per la commutatività dei diagrammi  $d_{y'}\sigma(\Theta_{y',\hat{Y}}) \subset l$  con  $l$  sottospazio vettoriale di dimensione 1. Ciò viola palesemente le proprietà dello scoppiamento. Consideriamo la generica curva nonsingolare  $C$  passante per  $y$  di equazione  $\alpha u + \beta v$  con  $(u, v)$  coordinate locali. La trasformata birazionale  $C' \subset \hat{Y}$  è isomorfa a  $C$  e interseca  $L$  nel punto  $y' = (-\alpha, \beta)$ ; scegliendo  $\alpha$  e  $\beta$  tali che  $y' \notin S$  e  $\langle(-\alpha, \beta)\rangle \neq l$  l'isomorfismo dei piani tangenti di  $C$  e  $C'$  ci permette di concludere

$$l \not\supset \Theta_{y,C} = d_{y'}\sigma(\Theta_{y',C'}) \subset d_{y'}\sigma(\Theta_{y',\hat{Y}})$$

e quindi  $d_x\phi$  è un isomorfismo. D'altro canto siccome  $\phi^{-1}$  non è regolare in  $y$  (non lo è  $\sigma^{-1}$ ) esisterà, sempre 2.3.2, una curva  $D \ni x$  tale che  $\phi(D) = \{y\}$ ; allora  $d_x\phi(\Theta_{x,D}) = 0$  in contraddizione con il fatto che  $d_x\phi$  è un isomorfismo. Pertanto  $\psi$  è regolare.  $\square$

Tale proprietà universale ha come immediata conseguenza il fatto che, considerando un numero finito di scoppiamenti, un'applicazione regolare birazionale può essere fattorizzata con un isomorfismo.

**Corollario 2.3.4.** . *Siano  $X$  ed  $Y$  superfici proiettive lisce e  $\phi : X \rightarrow Y$  un morfismo regolare birazionale. Allora esiste un isomorfismo  $f : X \rightarrow Y_m$  ed una catena di scoppiamenti  $\sigma_1, \dots, \sigma_m, \sigma_i : Y_i \rightarrow Y_{i-1}$  tale che*

$$\phi = f \circ \sigma_m \circ \dots \circ \sigma_1.$$

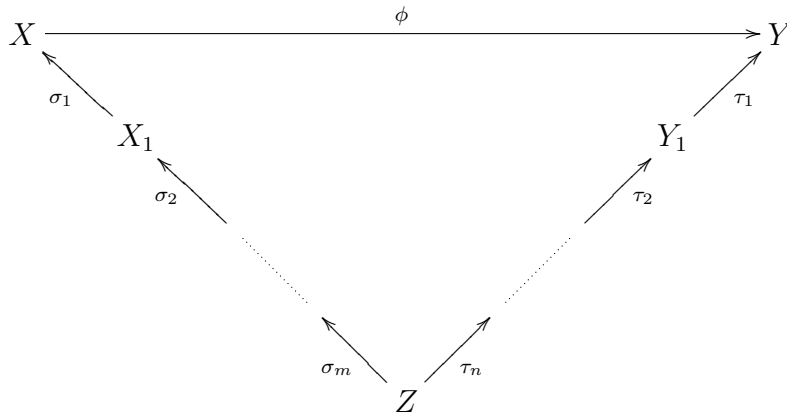
*Dimostrazione.* Supponiamo che  $\phi$  non sia un isomorfismo, altrimenti non c'è nulla da dimostrare. Usando la proprietà universale dello scoppiamento costruiamo le successioni  $\sigma_k, Y_k, f_k$  iterativamente. Sia  $S_k$  l'insieme finito di

punti in cui  $f_k$  non è regolare. Sicuramente se  $x \in S_k$  allora esiste una curva  $C$  tale che  $f_k(C) = x$  e quindi  $f_{k-1}(C) = \sigma_k(f_k(C)) = \sigma_k(x)$  cioè  $x \in S_{k-1}$ . D'altro canto se  $y$  è il centro di  $\sigma_k$  allora  $\sigma_k(E_k) = y$  e  $f_{k-1}(C') = y$  per una certa curva  $C'$  in  $X$ ; per 2.3.3  $f_k(C') = E_k$  e quindi  $|S_k| < |S_{k-1}|$ . Esisterà dunque un certo  $m$  tale che  $S_m = \emptyset$  ed il corrispondente  $f_m$  sarà un isomorfismo.  $\square$

Siamo finalmente arrivati al nostro obiettivo finale:

**Corollario 2.3.5 (Teorema di fattorizzazione in scoppiamenti).** *Sia  $\phi : X \rightarrow Y$  un'applicazione birazionale tra superfici proiettive nonsingolari. Esiste una superficie  $Z$  e due successioni di scoppiamenti  $\sigma_i : X_i \rightarrow X_{i-1}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , e  $\tau_j : Y_j \rightarrow Y_{j-1}$ ,  $j = 0, \dots, n$ , con  $X_0 = X$ ,  $Y_0 = Y$ ,  $Z = X_m \cong Y_n$ , tali che*

$$\phi \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \dots \circ \tau_n.$$



*Dimostrazione.* Per il Teorema 2.2.4 esiste una catena di scoppiamenti  $\sigma_i$  tale che  $\phi \circ \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_m = \psi : X_m \rightarrow Y$ , per una certa  $X_m$  e  $\psi$  regolare; quest'ultima si fattorizza per il corollario 2.3.4 in una serie di scoppiamenti  $\tau_i$  ed un isomorfismo, e ciò è quanto asserito nella tesi.  $\square$

*Esempio 9.* Un semplice esempio è dato dall'applicazione birazionale

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [x_0 : x_1 : x_2] &\longmapsto [x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 + x_1^2] \end{aligned}$$

non regolare in  $p = [0 : 0 : 1]$ . La risoluzione di  $p$  è data dall'applicazione regolare birazionale  $\psi = f \circ \sigma : \bar{\Gamma} \longrightarrow \mathbb{P}^2$ , dove  $\bar{\Gamma}$  è la varietà descritta nell'esempio 6. L'inversa di  $f$  è

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^2 \\ [y_0 : y_1 : y_2] &\longmapsto [y_0^2 : y_0y_1 : y_0y_2 - y_1^2] \end{aligned}$$

anch'essa non regolare in  $p$ . Chiaramente  $f$  induce un isomorfismo di  $\mathbb{P}^2 \setminus \{p\}$  in sé stesso perciò l'unica curva di  $\bar{\Gamma}$  che può avere per immagine un punto è la fibra eccezionale  $E$ . In effetti se prendiamo equazioni locali in  $x_2 \neq 0$  con la solita notazione

$$f \circ \sigma(u, ut, t) = f[u : ut : 1] = [u^2 : u^2t : u + u^2t] = [u : ut : 1 + u^2t]$$

e quindi  $\psi(E) = \psi(\mathcal{V}(u)) = \{p\}$ . In conclusione  $\psi$  è già lo scoppimento di  $\mathbb{P}^2$  rispetto a  $p$ .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 \\ & \swarrow \sigma & \searrow \sigma \\ & \bar{\Gamma} & \end{array}$$

*Esempio 10.* Torniamo all'esempio 8. Vogliamo fattorizzare il morfismo  $\psi$  ottenuto risolvendo  $f$ . Innanzitutto dobbiamo cercare di determinare quali curve di  $X$  vengono contratte in un punto da  $\psi$ . Consideriamo dapprima le tre fibre eccezionali. Ad esempio  $E_0$ , avendo equazione locale  $u$ , sarà tale che

$$\psi(E_0) = f \circ \sigma_0 \circ \sigma_1 \circ \sigma_2(\mathcal{V}(u)) = [0 : t : 1] := R_0$$

e lo stesso vale per le altre fibre eccezionali. Quindi  $\psi$  non contrae le  $E_i$  in un punto. Inoltre posto  $L_i = \mathcal{V}(x_i)$  è facile convincersi che  $f$  induce un

isomorfismo

$$\mathbb{P}^2 \setminus (L_0 \cup L_1 \cup L_2) \cong \mathbb{P}^2 \setminus (R_0 \cup R_1 \cup R_2).$$

Pertanto le uniche possibili curve contratte sono  $L'_0, L'_1, L'_2$  ossia  $\psi$  si fattorizza in al più tre scoppiamenti. D'altra parte si verifica facilmente che  $f^{-1}$  è data dalla stessa espressione di  $f$ ; quindi  $f^{-1}$ , e conseguentemente  $\psi^{-1}$ , non è definita nei tre punti  $p_1, p_2, p_3$ . Ciò implica che la decomposizione di  $\psi$  deve comprendere  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  ed in definitiva  $\phi \circ \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ \sigma_2 \circ \sigma_3$ .

## 2.4 Ulteriori sviluppi

L'equivalenza birazionale stabilisce un criterio di classificazione tra varietà; la natura di detto criterio può essere compresa indagando la struttura delle applicazioni che lo definiscono. Ad esempio due curve sono birazionalmente equivalenti se e soltanto se sono isomorfe, ed in questo caso dire equivalenza birazionale è dire isomorfismo. Abbiamo osservato nella sezione 2.3 che passando in dimensione 2 le applicazioni birazionali tra superfici continuano ad avere una struttura molto semplice. In dimensioni maggiori la questione si complica alquanto, e l'idea di tentare una classificazione mediante un simile approccio può non rivelarsi altrettanto valida.

Il problema della classificazione birazionale delle superfici ha nei teoremi illustrati una sua prima giustificazione. Si definisca  $\mathcal{B}(S)$  come l'insieme delle classi di isomorfismo delle superfici birazionalmente equivalenti a  $S$ . Che tale insieme non sia banale, ovvero che la nozione di birazionalità non collassi in quella di isomorfismo anche in dimensione 2, è presto verificato: la quadrica  $Q$  dell'esempio 8 e  $\mathbb{P}^2$  non sono infatti isomorfe. È dunque possibile introdurre in tale insieme una relazione d'ordine detta *dominanza*; si dice che  $S_1$  domina  $S_2$  se esiste un morfismo birazionale  $S_1 \rightarrow S_2$ . Si può dimostrare che comunque data  $S$  tale relazione ammette elementi minimali detti *modelli minimali* (cfr.[1] pag.19, Proposizione II.16).

Per il corollario 2.3.4 un modello è minimale se non è lo scoppimento di nessun'altra superficie, ovvero se non contiene curve eccezionali nel senso del Criterio di Contraibilità di Castelnuovo. Il punto veramente delicato è capire se, e sotto quali condizioni, esista un unico modello minimale per un elemento di  $\mathcal{B}(S)$ . Se  $S$  non è una superficie rigata, ovvero non è isomorfa a  $C \times \mathbb{P}^1$  per una certa curva  $C$ , la risposta è affermativa.

# Bibliografia

- [1] A. Beauville. *Complex Algebraic Surfaces. Second Edition.* Cambridge University Press, 1996.
- [2] W. Fulton. *Intersection Theory.* Springer, 1984.
- [3] J. Harris. *Algebraic Geometry: A First Course.* Springer, 1992.
- [4] R. Hartshorne. *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, 1996.
- [5] M. Reid. *Chapters on Algebraic Surfaces.* American Mathematical Society, 1996.
- [6] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry.* Springer, 1977.
- [7] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1. Varieties in Projective Space.* Springer-Verlag, 1994.
- [8] R. Y. Sharp. *Steps in Commutative Algebra. Second Edition.* Cambridge University Press, 2000.
- [9] J. H. Silverman and J. Tate. *Rational Points on Elliptic Curves.* Springer-Verlag, 1992.
- [10] W. Fulton. *Algebraic Curves.* W.A. Benjamin, Inc., 1969.